ÉCOLE DE L'AIR 1970
Option
1ère épreuve de MATHÉMATIQUES MP
Durée : 3 heures

Un corrigé

Problème 1

1. La matrice associée au système défini par les trois équations (P_1), (P_2) et (P_3) s'écrit $A = \begin{pmatrix} 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$. On a $\det A = b(a-1)^2(a-2)$ et par conséquent :

• Si $b \neq 0$ et $a \notin \{1, 2\}$ alors les trois plans se coupent en un point.

• Si $b = 0$ le système s'écrit $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + az = 1 \\ ax + z = 1 \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} x = -z \\ (a-1)z = 0 \\ (a-1)z = 1 \end{cases}$, ce système est impossible, donc $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \varnothing$.

• Si $b \neq 0$ et $a = 1$, le système devient $\begin{cases} x + by + z = b \\ x + by + z = 1 \end{cases}$, donc il y a des solutions si, et seulement si, $b = 1$ et dans ce cas $(P_1) = (P_2) = (P_3)$.

• Si $b \neq 0$ et $a = 2$, le système devient $\begin{cases} x + by + z = b \\ x + by + 2z = 1 \\ 2x + by + z = 1 \end{cases}$, donc $x = z = by + 1 - b$. D'où $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \{ \, (by + 1 - b, y, by + 1 - b) \mid y \in \mathbb{R} \, \}$.

2. La droite (Δ) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n} = \dfrac{-1}{3} \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ et passe par le point $A(-1, 0, -1)$. D'où une représentation paramétrique de (Δ) :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ est un vecteur normal à (P_1), donc le vecteur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -9(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$. Donc le plan (P) admet une équation de la forme $x - y + d = 0$, et comme le point $A \in (P)$, alors $d = 0$. D'où l'équation de (P) : $x - z = 0$.

3. Notons $(\mathscr{E})$ l'ensemble des points dont la distance à (Δ) est d. On a :

$$(\mathscr{E}) = \{ \, M(x, y, z) \mid d(M, (\Delta) = d \, \}.$$

La droite (Δ) passe par le point $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et a pour vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tout point $P \in (\Delta)$ peut être écrit ainsi $P = A + t\vec{v}$.

La distance entre le point M et la droite (Δ) se trouve en calculant la distance MP avec P le point de (Δ) le plus proche de M. Cela revient à trouver P qui minimise MP ou qui minimise aussi MP^2 (la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$).

On a $MP^2 = (\overrightarrow{MA} + t\vec{v}) \cdot (\overrightarrow{MA} + t\vec{v})$. On cherche donc t tel que $\dfrac{\mathrm{d}(MP^2)}{\mathrm{d}t} = 0$, pour trouver ce minimum.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(MP^2)}{\mathrm{d}t} = 0 &\Longleftrightarrow 2\vec{v}\cdot(\overrightarrow{MA}+t\vec{v}) = 0\\ &\Longleftrightarrow \vec{v}\cdot\overrightarrow{MA}+t\vec{v}\cdot\vec{v} = 0\\ &\Longleftrightarrow \vec{v}\cdot\overrightarrow{MA}+t\|\vec{v}\|^2 = 0\\ &\Longleftrightarrow t = \frac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\end{aligned}$$

$t = \dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$ où $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{v}$ représente le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$. On a donc

$$d(M,(\Delta)) = MP = \|\overrightarrow{MA}+t\,\overrightarrow{v}\| = \left\|\overrightarrow{MA}-\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\right\|.$$

Si on pose $M = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, on obtient alors d'après les calculs :

$$d(M,(\Delta))^2 = \frac{1}{9}(5x^2+8y^2+5z^2+4xy-8xz+4yz+2x+8y+2z+2).$$

Ainsi, $(\mathscr{E})$ est la surface d'équation $5x^2+8y^2+5z^2+4xy-8xz+4yz+2x+8y+2z+2-9d^2 = 0$. La matrice associée à la forme quadratique s'écrit $Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4\\ 2 & 8 & 2\\ -4 & 2 & 5\end{pmatrix}$. Q admet deux valeurs propres 9 double et 0 simple, donc la surface $(\mathscr{E})$ est une surface cylindrique. Le vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de (Δ) est un vecteur propre de Q, donc les génératrices de $(\mathscr{E})$ sont parallèles à (Δ).

Problème 2

1. Posons $S = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, alors $SC = \lambda C \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_ij = \lambda$. Donc S est la matrice carrée de taille n, dont la somme des coefficients de chaque ligne est constante et vaut λ.

Notons x_{ij} le coefficient de la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice SU. On a $x_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}$.

Donc $SU = \lambda U$ si, et seulement si, $SU = \lambda U$.

2. (a) $E_1 = \{\ S\in E \mid \exists\lambda\in\mathbb{R} \text{ et } SC = \lambda C\ \}$. Il est clair que la somme de chaque linge de I est égale à 1 et que la somme de chaque linge de U est égale à n, donc I et U sont dans E_1.

(b) Soit $S\in E_1$ et inversible, alors il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $SC = \lambda C$, donc nécessairement $\lambda\neq 0$, sinon la matrice S serait non inversible et par conséquent $S^{-1}C = \dfrac{1}{\lambda}C$ et $S^{-1}\in E_1$.

3. Il est clair que E_1 est un sous-espace vectoriel de E, stable par la multiplication et contient l'élément unité. Donc il s'agit bien d'une sous-algèbre de E.

4. Soient S_1 et S_2 de E_1 et $\lambda\in\mathbb{R}$, on a : $(S_1+\lambda S_2)C = \Phi(S_1+\lambda S_2)C$ et comme $S_1C = \Phi(S_1)C$ et $S_2C = \Phi(S_2)C$, alors $(S_1+\lambda S_2)C = (\Phi(S_1)+\lambda\Phi(S_2))C$, de plus le vecteur C est non nulle, donc $\Phi(S_1+\lambda S_2) = \Phi(S_1)+\lambda\Phi(S_2)$. D'autre part, $S_1S_2C = S_1\Phi(S_2)C = \Phi(S_2)S_1C = \Phi(S_2)\Phi(S_1)C$, d'où $\Phi(S_1S_2) = \Phi(S_1)\Phi(S_2)$. Enfin, $\Phi(I) = 1$, puisque $IC = 1.C$.
En conclusion, Φ est un morphisme d'algèbres.

5. Soit $S\in E_1$, alors $\Phi(S) = 0 \Leftrightarrow SU = 0 \Leftrightarrow \forall i\in[\![1,n]\!], \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$,d'où :

$$\ker\Phi = \left\{ S = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\ \middle|\ \forall i\in[\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0 \right\}.$$

Si $S \in E_1$, on a $\Phi\left(S - \dfrac{\Phi(S)}{n}U\right) = \Phi(S) - \dfrac{\Phi(S)}{n}\Phi(U) = \Phi(S) - \dfrac{\Phi(S)}{n}n = 0$, donc $S - \dfrac{\Phi(S)}{n}U \in \ker\Phi$.
D'autre part, Φ est une forme linéaire non nulle de E_1 et $U \notin \ker\Phi$, donc $E_1 = \ker\Phi \oplus \mathrm{Vect}(U)$. Pour $S \in E_1$, il existe $H \in \ker\Phi$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $S = K + \lambda U$, comme $\Phi(H) = 0$, alors $\Phi(S) - \lambda\Phi(U) = 0$ et donc $\lambda = \dfrac{\Phi(S)}{n}$, donc $H = S - \dfrac{\Phi(S)}{n}U$ et par conséquent :

$$\ker\Phi = \left\{ S - \frac{\Phi(S)}{n}U \;\middle|\; S \in E_1 \right\}.$$

6. L'élément, $I - \dfrac{1}{n}U$ de $\ker\Phi$ vérifie, pour $S \in E_1$,

$$\left(S - \frac{\Phi(S)}{n}U\right)\left(I - \frac{1}{n}U\right) = S - \frac{SU}{n} - \frac{\Phi(S)U}{n} + \frac{\Phi(S)U^2}{n^2} = S - \frac{SU}{n} - \frac{\Phi(S)U}{n} + \frac{\Phi(S)U}{n} = S - \frac{\Phi(S)}{n}U.$$

Donc $I - \dfrac{1}{n}U$ est un élément neutre à droite pour la multiplication dans le sous-anneau $\ker\Phi$.

• • • • • • • • •